数理解析研究所講究録
680巻 1989年 127-136

不動点定理と計画数学

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Xをある集合，$\mathcal{F}(X)$をX上のfuzzy sets[5]の族とする．このとき，Xから$\mathcal{F}(X)$への写像FをX上のfuzzy変換という．このfuzzy変換Fに対して，$F(x_0, x_0)=1$となるXの点x_0をFの不動点という．TをXから2^X（Xの部分集合の全体）への写像とするとき，fuzzy変換Fを$F(x, y)=1_{Tx}(y)$とすれば，Fの不動点x_0は，実際Tの不動点$x_0 \in Tx_0$となる．そこで，まず初めに，線形位相空間での2変数関数の存在定理を証明する．同様な結果が完備距離空間の場合でも証明できるが，この定理を用いると，nonconvex minimization problemsで有用なEkeland[2]によるε-variational principleが証明できる．つぎにある最小化問題をBanach空間の問題として捉え，それを用いて，非線形半群の共通不動点定理を証明する．最後にMarkov-Kakutaniの不動点定理とFan-Browderの不動点定理[1]を用いて，Hahn-Banachの定理の拡張定理であるMazur-Orliczの定理が得られるが，その結果から得

られる定理を用いて，ゲームの core を論じる．不動点定理と計画数学がどのように関わりをもち，互いに応用されていくかをみていただきたい．

§1. 2変数関数の存在定理

まず初めに線形位相空間での2変数関数の存在定理を証明する．

定理1．Eを局所凸な線形位相空間とし，XをEのコンパクトな凸集合とする．Fを$X\times X$から$\mathbb{R}$への上半連続な関数とし，第2変数に関して，quasi-concave であるとする．

$$M(x)=\sup_{y\in X}F(x,y),\ {}^\forall x\in X$$

とし，Mを下半連続とする．このとき，$F(x_0,x_0)=M(x_0)$となる$x_0\in X$が存在する．

証明．
$$Tx=\{y\in X\ ;\ F(x,y)\geqq M(x)\},\ {}^\forall x\in X$$

とすると，Txは空でない閉凸集合である．いま

$$G(T)=\{(x,y)\in X\times X\ ;\ y\in Tx\}$$

とすると，$G(T)$は$X\times X$で閉集合となる．実際，$(x_\alpha,y_\alpha)\to(x,y)$，$(x_\alpha,y_\alpha)\in G(T)$とすると，

$$\begin{aligned}F(x,y)&\geqq\overline{\lim_\alpha}F(x_\alpha,y_\alpha)\geqq\overline{\lim_\alpha}M(x_\alpha)\\&\geqq\underline{\lim_\alpha}M(x_\alpha)\geqq M(x)\end{aligned}$$

となり，$(x,y)\in G(T)$を得る．これはTが上半連続であることを意味し，Fan の不動点定理を用いると，$x_0\in Tx_0$となる

点 $x_0\in X$ を得ることができる．これは $F(x_0, x_0)=M(x_0)$ となる点 $x_0\in X$ の存在を意味する．

この定理からつぎの系が簡単に得られる．

系1．Eを局所凸な線形位相空間とし，XをEのコンパクトな凸集合とする．$F: X\times X\to\mathbb{R}$ を上半連続な関数とし，第2変数に関して quasi-concave であるとする．さらに $F(x,y)\leqq M$ とし，任意の $x\in X$ に対して，$F(x,y)=M$ となる $y\in X$ が存在するとする．このとき，$F(x_0,x_0)=M$ となる点 $x_0\in X$ が存在する．

定理1はまたこれまでのFanの2つの存在定理を証明するのにも有効である[4]．

系2 (Fan)．Eをノルム空間とし，XをEのコンパクトな凸集合とする．このとき，TをXからEへの連続写像とするなら

$$\|x_0-Tx_0\|=\min_{y\in X}\|y-Tx_0\|$$

となる $x_0\in X$ が存在する．

証明．
$$F(x,y)=-\|y-Tx\|,\ \forall x,y\in X$$

とすると，Fは $X\times X$ 上で連続で，第2変数に関して concave である．また，$M(x)=\sup_{y\in X}F(x,y)$ は下半連続である．ここで定理1を用いると，$F(x_0,x_0)=M(x_0)$ となる $x_0\in X$ が存在する．これは $\|x_0-Tx_0\|=\min_{y\in X}\|y-Tx_0\|$ となる $x_0\in X$ の存在を意味する．

系3 (Fan). Eを局所凸な線形位相空間とし, XをEのコンパクトな凸集合とする. このとき, TをXからEへの連続写像とするなら, つぎの(1)または(2)が成立する.

(1) $Ty_0=y_0$ となる $y_0\in X$ が存在する.

(2)
$$0<p(x_0-Tx_0)=\min_{y\in X}p(y-Tx_0)$$
となる $x_0\in X$ とE上の連続な seminorm p が存在する.

証明. (1)を否定すると, すべての $x\in X$ に対し, $Tx\neq x$ である. そこで, $p_x(x-Tx)>0$ となる連続な seminorm p_x が存在する. 任意の $x\in X$ に対して
$$G_x=\{y\in X : p_x(y-Ty)>0\}$$
とすると, $\{G_x : x\in X\}$ はXの open covering となる. ここでXはコンパクトであるから, Xの finite open covering $\{G_{x_1}, G_{x_2}, \cdots, G_{x_n}\}$ が存在する. $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ をこの finite open covering に対する1の分解とし, $F(x,y)$, $M(x)$ を
$$F(x,y)=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(y-Tx),\ {}^{\forall}x,y\in X,$$
$$M(x)=\sup_{y\in X}F(x,y),\ {}^{\forall}x\in X$$
とする. このとき系2の場合と同様にして, $F(x_0,x_0)=M(x_0)$ となる $x_0\in X$ の存在が証明できる. これは
$$-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(x_0-Tx_0)=\sup_{y\in X}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(y-Tx_0)\right\}$$
となる $x_0\in X$ の存在を意味する. そこで $p=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}$ とすると, $0<p(x_0-Tx_0)=\inf_{y\in X}p(y-Tx_0)$ となり, 求めると

ころの $x_0 \in X$ と連続な seminorm p が得られる．

つぎに，完備距離空間における2変数関数の存在定理を証明する．

定理2．X を完備距離空間とし，F を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数，M を X から $\mathbb{R}$ への関数とする．φ を X から $(-\infty, \infty]$ への proper で下に有界な下半連続な関数とし，任意の $x \in X$ に対して，

$$F(x, y) = M(x),\ \varphi(y) + d(x, y) \leqq \varphi(x)$$

となる $y \in X$ が存在するものとする．このとき，$F(x_0, x_0) = M(x_0)$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

証明．$x \in X$ とする．$x_0 = x$ とし，以下 x_n を帰納的につぎのように定義する．まず，

$$S_n = \{ w \in X : w \neq x_{n-1},\ F(x_{n-1}, w) = M(x_{n-1}),\ \varphi(w) + d(x_{n-1}, w) \leqq \varphi(x_{n-1}) \}$$

とし，x_n を S_n の元で，

$$\varphi(x_n) \leqq \inf_{w \in S_n} \varphi(w) + \frac{1}{2}\{\varphi(x_{n-1}) - \inf_{w \in S_n} \varphi(w)\}$$

を満たすようにとる．すると $n < m$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leqq \sum_{i=n}^{m-1} \{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})\} \\ &= \varphi(x_n) - \varphi(x_m) \qquad \cdots (*) \end{aligned}$$

である．よって $\{x_n\}$ は Cauchy 列である．X は完備なので，$\{x_n\}$ は X のある点 v に収束する．$(*)$ 式で，$m \to \infty$ とすると

$$d(x_n, v) \leqq \varphi(x_n) - \lim \varphi(x_m) \leqq \varphi(x_n) - \varphi(v)$$

である．よって，$v \in S_{n+1}$ である．またこの v に対して，定理の仮定より，$F(v, v') = M(v)$，$\varphi(v') + d(v, v') \leqq \varphi(v)$ となる v' が存在するが，$v \neq v'$ とすると

$$\begin{aligned}\varphi(v') &\leqq \varphi(v) - d(v, v') \\ &\leqq \varphi(v) - d(v, v') + \varphi(x_n) - \varphi(v) - d(x_n, v) \\ &= \varphi(x_n) - \{d(v, v') + d(x_n, v)\} \\ &\leqq \varphi(x_n) - d(x_n, v')\end{aligned}$$

より，$v' \in S_{n+1}$ を得る．だから

$$2\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n) \leqq \inf_{w \in S_{n+1}} \varphi(w) \leqq \varphi(v')$$

である．ここで $n \to \infty$ とすると，$\varphi(v) \leqq \varphi(v')$ を得る．よって $d(v, v') = 0$，すなわち $v = v'$ を得る．これは矛盾である．これで定理は証明された．

この定理を用いるとつぎの nonconvex minimization problems で有用な Ekeland の定理が系として得られる．

系4（Ekeland）．X を完備距離空間とし，φ を X から $(-\infty, \infty]$ への proper で下に有界な下半連続関数とする．このとき，正の数 $\varepsilon > 0$ と

$$\varphi(u) \leqq \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon$$

を満たす $u \in X$ に対して，つぎの (1), (2), (3) を満たす $v \in X$ が存在する．

(1) $\varphi(v) \leqq \varphi(u)$;

(2) $d(v, u) \leqq 1$;

(3) $v \neq w$ となる $w \in X$ に対し, $\varphi(w) > \varphi(v) + d(v, w)$.

§2. 共通不動点定理

S を semitopological semigroup とし, C を Banach 空間 E の閉凸集合とする. このとき, C 上の写像の族 $\{T_t : t \in S\}$ が nonexpansive semigroup であるといわれるのは, つぎの (1), (2), (3) の条件を満たすときである.

(1) $T_t : C \to C$, $\|T_t x - T_t y\| \leqq \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$, $\forall t \in S$;

(2) $T_{ts} = T_t T_s$, $\forall t, s \in S$;

(3) 任意の $x \in C$ に対し, $t \mapsto T_t x$ は連続である.

このような nonexpansive semigroup は例えば, つぎのような初期値問題に対して現れる.

g を Hilbert 空間 H から $(-\infty, \infty]$ への proper で凸な下半連続関数とし, 劣微分 $\partial g(x)$ を

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geqq g(x) + (x^*, y - x), \ \forall y \in H\}$$

で定義する. このとき, ∂g は極大増大作用素であることが知られている. また, この ∂g に対して, 初期値問題

$$\frac{du(t)}{dt} + \partial g\, u(t) \ni 0, \quad u(0) = x$$

が strong solution $u : [0, \infty) \to H$ をもつこともよく知られている. ここで $S(t)x = u(t)$ とおくと, $\{S(t) ; 0 \leqq t < \infty\}$ は

$\overline{D(\partial g)}$ 上の nonexpansive semigroup となることが証明できる．$F(S(t))$ を $S(t)$ の不動点の全体とすると

$$0 \in \partial g(x_0) \Longleftrightarrow g(x_0) = \min_{x \in H} g(x) \Longleftrightarrow x_0 \in \bigcap_{t \in [0,\infty)} F(S(t))$$

が成り立つ．すなわち，ある種の最小化問題を解くことと，nonexpansive semigroup の共通不動点を求めることとは同値なのである．そこでつぎの2つの補助定理を用いて，nonlinear semigroup に対する共通不動点定理を証明する．

補助定理1．Eを回帰的なBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．φ をCから $(-\infty,\infty]$ へのproperで凸な下半連続関数とし，$\|x_n\| \to \infty$ ならば $\varphi(x_n) \to \infty$ を満たすものとする．このとき，$\varphi(x_0) = \min\{\varphi(x) ; x \in C\}$ となる $x_0 \in C$ が存在する．

補助定理2．Eを uniformly convex で uniformly smooth なBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．Sを index set とし，$B(S)$ をS上の有界関数のつくるBanach空間とする．$\{x_t ; t \in S\}$ をEの有界集合とし，Xを1を含む $B(S)$ の部分空間とする．また，Xは $z \in C$，$u \in E$ に対して，

$$h(t) = \|x_t - z\|^2, \quad g(t) = (u, J(x_t - z))$$

で定義される関数 h, g を含むものとする．このとき，X上の mean μ に対して

$$\mu_t \|x_t - u\|^2 = \min_{z \in C} \mu_t \|x_t - z\|^2$$

を満たす $u \in C$ が一意に存在する．

定理3．Eをuniformly convexでuniformly smoothなBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．SをS上の連続有界関数の全体がinvariant meanをもつようなsemitopological semigroupとし，$\{T_t : t \in S\}$をC上のnonexpansive semigroupとする．このとき，Cのある元xに対して，$\{T_t x ; t \in S\}$が有界ならば，$T_t x_0 = x_0$ ($\forall t \in S$)となる$x_0 \in C$が存在する．

§3．ゲームのコア

Markov-Kakutaniの不動点定理とFan-Browderの不動点定理を用いると，Mazur-Orliczの定理が証明され，それを用いて，つぎの命題が証明できる．

Eをノルム空間とし，$\{x_\nu : \nu \in I\} \subset E$とする．$\{\alpha_\nu : \nu \in I\}$を$\{x_\nu : \nu \in I\}$に対応する実数の集合とし，$\rho \geqq 0$とする．このとき，つぎの(1)と(2)は同値である．

(1) $\alpha_\nu \leqq f(x_\nu)$ ($\forall \nu \in I$)と$\|f\| \leqq \rho$となるE上の線形連続汎関数$f \in E^*$が存在する．

(2) $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$と$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$（ただし，$\delta_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$）に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \alpha_{\nu_i} \leqq \rho \left\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_{\nu_i} \right\|$$

が成り立つ．

これを用いると，ゲームのコアに関するいくつかの命題が簡単に証明できるが，ここではその中の1つだけを述べる．

定理4 [3]. Ωをある集合, ΣをΩの subsets のつくるある field とする. vをΣから$[0, \infty)$へのゲームとし, TをΩ上の$S \in \Sigma$なら$T^{-1}S \in \Sigma$となる変換とする. このとき, つぎの (1) と (2) は同値である.

(1) vの T-core $\mathcal{C}_T(v)$は空でない;

(2) 任意の$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$と$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m \in \mathbb{R}$, $S_1, S_2, \cdots, S_m \in \Sigma$に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqq v(\Omega) \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j (1_{S_j} - 1_{T^{-1}S_j}) \right\|$$

が成り立つ.

References

[1] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283–301.

[2] Ekeland, I., Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443–474.

[3] Shioji, N. and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 383–398.

[4] 高橋 渉, 非線形関数解析学 —不動点定理とその周辺— 近代科学社, 1988.

[5] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965), 338–353.